

โมเมนตัม (Momentum)

1. โมเมนตัม

เป็นปริมาณการเคลื่อนที่ของวัตถุ ซึ่งปริมาณนี้จะบอกถึงความพยายามที่วัตถุจะเคลื่อนที่ไปข้างหน้า

ปริมาณโมเมนตัมที่กำหนดขึ้นนี้ มีขนาดมากน้อยเพียงใด ขึ้นอยู่กับมวลและความเร็วของวัตถุในขณะนั้น ตามความสัมพันธ์ว่า

โมเมนตัม = มวล x ความเร็ว

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

โมเมนตัมเป็นปริมาณเวกเตอร์ มีทิศทางตามทิศของความเร็ว \vec{v} มีหน่วยเป็น กิโลกรัม-เมตร/วินาที (kg.m/s)

2. แรงและการเปลี่ยนโมเมนตัม

มาพิจารณาวัตถุมวล m กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว \vec{u} มีแรงคงที่ \vec{F} มากระทำต่อวัตถุในช่วงเวลา Δt เป็นผลให้วัตถุมีความเร็วเป็น \vec{v} เมื่อใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\vec{F} = \frac{m(\vec{v} - \vec{u})}{\Delta t}$$

$$\text{เมื่อ } \vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{u}}{\Delta t}$$

$$\vec{F} = \frac{m\vec{v} - m\vec{u}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$$

∴ แรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุ = อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมของวัตถุนั้น
ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าโมเมนตัมเป็นปริมาณเวกเตอร์ ดังนั้นเมื่อโมเมนตัมมีการเปลี่ยนแปลงไป การคำนวณหาโมเมนตัมลัพธ์ก็ใช้หลักการของเวกเตอร์ ถ้าให้แรง \vec{F} กระทำต่อวัตถุที่มีโมเมนตัม $m\vec{u}$ ทำให้โมเมนตัมเปลี่ยนไปเป็น $m\vec{v}$ พิจารณาได้เป็น 3 กรณี :-

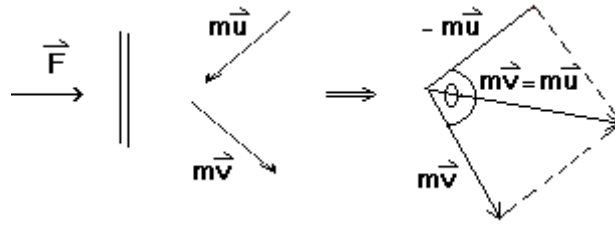
ก. เมื่อทิศทางของแรง \vec{F} อยู่ในทิศเดียวกับ \vec{u} และ \vec{v}
(ทำให้ $v > u$)

$$\begin{array}{c} \vec{F} \rightarrow \\ \parallel \\ \begin{array}{ccc} m\vec{u} & \rightarrow & m\vec{v} \\ \Rightarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{m\vec{v}} \\ \xleftarrow{-m\vec{u}} \\ m\vec{v} = m\vec{u} - m\vec{u} \end{array} \end{array}$$

ข. เมื่อทิศทางของแรง \vec{F} อยู่ในทิศสวนทางหรือตรงข้ามกับ \vec{u} และ \vec{v}
(ทำให้ $v > u$)

$$\begin{array}{c} \vec{F} \leftarrow \\ \parallel \\ \begin{array}{ccc} m\vec{u} & \rightarrow & m\vec{v} \\ \Rightarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{-m\vec{u}} \\ \xleftarrow{m\vec{v}} \\ m\vec{v} = m\vec{u} - m\vec{u} \end{array} \end{array}$$

ค. เมื่อทิศทางของแรง \vec{F} ไม่อยู่ในทิศเดียวกับ \vec{u} และ \vec{v}



3. การดลและแรงดล (Impulse and Impulsive Force)

$$\vec{F} = \frac{m(\vec{v} - \vec{u})}{\Delta t}$$

จากสมการ

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{v} - m\vec{u}$$

แรงลัพท์ x เวลา = การเปลี่ยนโมเมนตัมของวัตถุนั้น

ค่าของแรงลัพท์คูณกับเวลา เราเรียกปริมาณนี้ว่า **การดล** มีหน่วยเป็นนิวตัน.

วินาทีหรือกิโลกรัม.เมตร/วินาที ซึ่งก็เป็นปริมาณที่บอกถึงการเปลี่ยนโมเมนตัมของวัตถุ

นั่นเอง โดยอธิบายได้ว่า สำหรับการเปลี่ยนโมเมนตัมของวัตถุที่เท่ากัน

ถ้าออกแรงมากเวลาที่ใช้น้อย แต่ถ้าเวลาที่ใช้มากแรงที่ใช้ก็มีค่าน้อย ดังกราฟ

หมายเหตุ พื้นที่ใต้กราฟเป็นการเปลี่ยนโมเมนตัมโดย

พื้นที่ A = พื้นที่ B

การดลที่อาจพบเห็นในชีวิตประจำวันได้แก่ ลูกกระสุนปืนวิ่งกระทบเป้า รถยนต์ชนกัน การตอกตะปูด้วยค้อน การตีลูกเทนนิสหรือลูกขนไก่ ลูกกระทบกันของลูกบิลเลียด

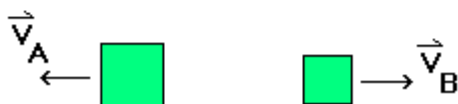
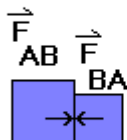
การดลที่ยกตัวอย่างนี้ เป็นการดลที่ใช้เวลาสั้น ๆ แรงซึ่งกระทำในช่วงเวลาสั้น ๆ

นี้เราเรียกว่า **แรงดล** มีหน่วยเป็นนิวตัน

4. การถ่ายทอดโมเมนตัมและพลังงานจลน์ในการชนของวัตถุ

เพื่อที่จะดูว่าเมื่อวัตถุชนกันแล้ว โมเมนตัมจะมีการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นหรือสูญหายไปไหนหรือไม่ ลองมาพิจารณาระบบต่อไปนี้

ให้วัตถุ A และมี B มีมวล m_A, m_B ความเร็ว \vec{u}_A, \vec{u}_B ตามลำดับดังรูป



หลังวัตถุทั้งสองวิ่งเข้าชนกัน ให้มีความเร็วเป็น \vec{v}_A, \vec{v}_B ขณะที่วัตถุ A, B ชนกัน จะเกิดแรงกระทำต่อกัน

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \text{ (แรงกิริยา = แรงปฏิกิริยามีทิศตรงข้าม)}$$

แรงที่ A กระทำต่อ B = แรงที่ B กระทำต่อ A

$$\therefore \frac{m_B \vec{V}_B - m_B \vec{U}_B}{\Delta t} = \frac{-m_A \vec{V}_A - m_A \vec{U}_A}{\Delta t}$$

$$m_A \vec{U}_A + m_B \vec{U}_B = m_A \vec{V}_A + m_B \vec{V}_B$$

สรุปได้ว่า เมื่อมีการชนกันของวัตถุ โมเมนตัมรวมก่อนชน = โมเมนตัมรวมหลังชน เราเรียก **หลักการทรงโมเมนตัม (principle of Conservation of Momentum)**

หลักการนี้มีประโยชน์มากโดยเฉพาะในกรณีที่ไม่ทราบเกี่ยวกับแรงที่กระทำต่อกัน

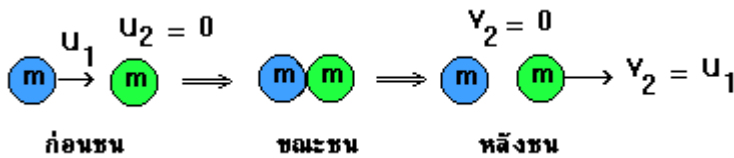
5. แบบของการชนกัน และพลังงานจลน์ในการชน

5.1 การชนแบบยืดหยุ่น (elastic collision)

เมื่อชนแล้ววัตถุจะแยกออกจากกัน โมเมนตัมก่อนชน = หลังชน, พลังงานจลน์ของวัตถุก่อนและหลังชนมีค่าเท่ากัน

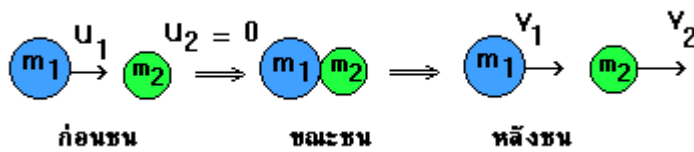
นอกจากนี้สำหรับการชนกันใน 1 มิติ มีลักษณะที่น่าสังเกตคือ

ก. ถ้ามวลทั้งสองเท่ากัน โดยมวลก้อนแรกเคลื่อนที่ ส่วนมวลก้อนที่สองหยุดนิ่ง ภายหลังจากการชน จะได้ว่า มวลก้อนแรกหยุดนิ่ง มวลก้อนที่สองจะกระเด็นไปด้วยความเร็วเท่ากับความเร็วเท่ากับความเร็ววัตถุก้อนแรก ดังรูป

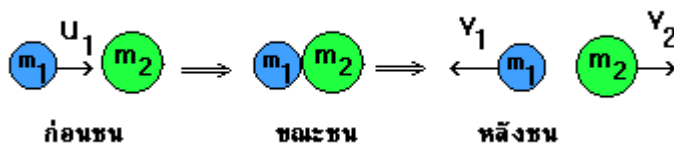


ข. ถ้ามวลไม่เท่ากัน แยกพิจารณาดังนี้

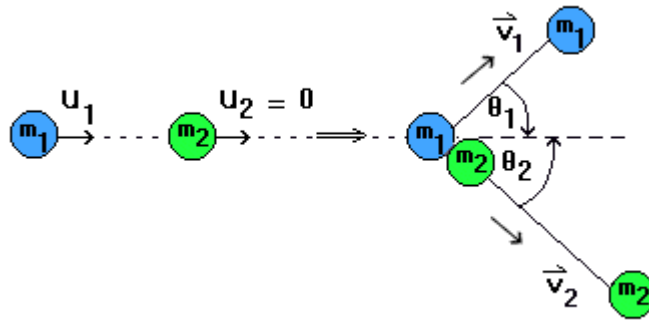
มวลก้อนใหญ่วิ่งไปชนมวลก้อนเล็ก ภายหลังจากการชน มวลก้อนใหญ่และมวลก้อนเล็กจะเคลื่อนที่ไปในทิศเดียวกัน แต่มวลก้อนใหญ่ มีความเร็วลดลง ดังรูป



มวลก้อนเล็กวิ่งไปชนมวลก้อนใหญ่ ภายหลังจากการชน มวลก้อนเล็กจะกระเด็นกลับ ส่วนมวลก้อนใหญ่จะเคลื่อนที่ไปในทิศเดียวกับมวลก้อนแรกก่อนชน ดังรูป



สำหรับการชนกันใน 2 มิติ ภายหลังจากการชนกันมวลทั้งสองจะแยกออกจากกันไปคนละทิศทาง ถ้ามวลทั้งสองก้อนเท่ากัน ($m_1 = m_2 = m$) จะได้ว่ามุมที่แยกกันหลังการชนจะรวมกันเป็นมุมฉาก



การทรงโมเมนตัมจะต้องคิดเป็นแกน ๆ ไป

$$\text{แกน } x : m_1 u_1 + 0 = m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2 \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{แกน } y : m_1 v_1 \sin \theta_1 = m_2 v_2 \sin \theta_2 \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{จากการทรงพลังงาน : } \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{(3)}$$

$$\text{ในกรณี } m_1 = m_2 = m$$

$$\text{จาก (1): } u_1 = v_1 \cos \theta_1 + v_2 \cos \theta_2$$

$$u_1^2 = v_1^2 \cos^2 \theta_1 + v_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2 v_1 v_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad \text{--- (4)}$$

$$\text{จาก (3): } u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad \text{--- (5)}$$

$$(4) - (5) : 0 = 2 v_1 v_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2$$

$$2 v_1 v_2 \neq 0 ; \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$$

สรุปได้ว่า ถ้ามวล $m_1 = m_2 = m$ ภายหลังจากชนกันจะแยกจากกันเป็นมุมฉาก

5.2 การชนแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic collision)

เมื่อชนแล้ววัตถุจะติดกันไปโมเมนตัมก่อนชน = หลังชน ส่วนพลังงานจลน์ไม่เท่ากัน เช่น รถยนต์ชนกัน

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 > \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

ในกรณีชนแบบยืดหยุ่น มาพิจารณาลักษณะเพิ่มเติม โดยกำหนดให้วัตถุ 2 ก้อน มีมวล, ความเร็วต้น และความเร็วปลาย เป็น m_1, u_1, v_1 และ m_2, u_2, v_2 ตามลำดับ เมื่อวัตถุทั้ง 2 ชนกัน เกิดการทรงโมเมนตัม และพลังงานจลน์
โมเมนตัมก่อนชน = โมเมนตัมหลังชน

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \text{--- (1)}$$

พลังงานจลน์ก่อนชน = พลังงานจลน์หลังชน

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{--- (2)}$$

จาก 1 และ 2 สามารถหาได้ว่า

$$u_1 - u_2 = -v_1 + v_2$$

$$\therefore a = \frac{-(v_1 - v_2)}{u_1 - u_2}$$

ซึ่งในการคำนวณโคจทย์ การชนกันแบบยืดหยุ่น เราสามารถใช้

$$a = \frac{(v_1 - v_2)}{u_1 - u_2} = 1$$

ความสัมพันธ์ นี้มาช่วย คำนวณได้ จะทำให้ ประหยัดเวลาได้มากที่สุดทีเดียว

หมายเหตุ กรณีการชนแบบไม่ยืดหยุ่น $a \neq 1$

6. การเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวล

เมื่อวัตถุหนึ่งวิ่งเข้าหากัน หรือวิ่งออกจากกันจุดศูนย์กลางของมวลของวัตถุคู่ นั้นย่อมมีการเคลื่อนที่ไปด้วย การศึกษาการชนกันของวัตถุอาจพิจารณาถึงจุด ศูนย์กลางมวลได้เช่นกัน ความเร็วของจุดศูนย์กลางของมวลจะเป็นไปตาม สมการ

$$\vec{V}_{C.M} = \frac{\sum m\vec{v}}{\sum m}$$